数学演習２@wiki

明治大学理工学部数学科1年次設置科目「数学演習２」の解説wikiです．
（昨日４，今日２）

期末試験終わりました．お疲れ様でした． 問題

演習プリントはここ
数学演習2コミュニティ（書き込むには明治大学数学科SNSのアカウントが必要です．）

2011年度予定
第1回演習　9/28 3番
第2回演習 10/05 6番
第3回演習 10/12 9番
第4回演習 10/19 12番
第5回演習 10/26 13番
第6回演習 11/02 19番
第7回演習 11/09 23番
第8回演習 11/16 25番
第9回演習 11/30 27・28番
第10回演習 12/7 29・30番
第11回演習 12/14 36番
第12回演習　12/21 38番
第13回演習　1/11 39番
プレテスト 1/18

意見・質問を書く

演習プリントの解説．（各タイトルからリンクが貼ってあります．）

1. 最大・最小・上界・下界・上限・下限の定義

2. 閉区間の上界
   $X=[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$とすると、$\{X$の上界$\}=\{a|1\leq a\}$を示せ。

3. デデキントの切断定理
   以下，「ワイエルシュトラスの公理」を仮定する．X,Yを$\mathbb{R}$の空でない部分集合とする。
   $X\cup Y=\mathbb{R}, X\cap Y=\phi, (\forall x\in X,\forall y\in Y, x<y)$を満たすとき「$X$に最大値が存在するか、または$Y$に最小値が存在する。」を証明せよ。

4. 上限のεー性質
   $X\subset\mathbb{R}$に対して、$a=\sup X$とするとき、
   $(\forall\varepsilon>0,\exists x\in X, a-\varepsilon<x)$であることを示せ。

5. εー性質の逆
   $X\subset\mathbb{R}$に対して、aはXの上界であるとするとき、
   $(\forall\varepsilon>0,\exists x\in X, a-\varepsilon<x\Rightarrow a=\sup X)$であることを示せ。

6. アルキメデスの原理
   $(\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ x<n)$を示せ。

7. 数列についての処々の定義。
   収束，最大，最小，上限，下限，有界など

8. 下限の実例

$\inf\left\{\frac{1}{n}\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$を示せ。

9. 上に有界な単調増加列

上に有界な単調増加列$\{a_n\}$が収束することを示せ。

10. 収束する数列の不等号

収束する数列$\{a_n\}, \{b_n\}$について、$\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b_n$であるならば、$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$であることを示せ。

11. はさみうちの定理

収束する数列$\{a_n\}, \{b_n\}$について、$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$とする。数列$\{c_n\}$が$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c_n \leq b_n$を満たすならば、$\{c_n\}$は収束し、かつ$\lim_{n\to\infty} c_n = a$であることを示せ。

12. 有界な無限数列（その１） （その2）

有界な無限数列$\{a_n\}$は収束する部分列$\{a_{n_k}\}$を持つことを示せ。

13. コーシー列は有界

数列$\{a_n\}$がコーシー列とすると、$\{a_n\}$は有界であることを示せ。

14. 収束列はコーシー列

数列$\{a_n\}$が収束するならば、$\{a_n\}$はコーシー列である。

15. 実数列のコーシー列は収束する

実数列$\{a_n\}$がコーシー列であるならば、収束する。

16. 上極限の実例

$a_n = \frac{n+1}{n}(-1)^n$とするとき、$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$を求めよ。

17. $\mathbb{R}^m$の定義

ノルムの定義，点列の収束の定義

18. シュワルツの不等式，三角不等式

$\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$に対して、次の不等式を証明せよ。

(1)$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$ （シュワルツの不等式）

(2)$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ （三角不等式）

19. 点列の収束と成分の収束

$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$とする。

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$$

を示せ。

20. 開円板の定義
    1次元の場合と高次元の場合

21. 開円板の特徴づけ(1) (2)
    (1) 開円板$B_1(\boldsymbol{o})$内の点列$\{\mathbf{a}_n\}$であって、以下の３条件を満たすものが存在する。
    (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_n \in B_1(\mathbf{o})$
    (b) 極限$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n$が存在する。
    (c) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n \notin B_1(\mathbf{o})$
    (2) 開円板の任意の点$\mathbf{b} \in B_r(\mathbf{a})$について、ある$r' > 0$が存在して、$B_{r'}(\mathbf{b}) \subset B_r(\mathbf{a})$である。

22. 開区間は開集合
    $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$とする。
    (1) 開区間(p, q)は開集合であることを示せ。
    (2) 閉区間$[p, q]$は開集合でないことを示せ。

23. 開正方形領域は開集合
    正方形領域$I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$が$\mathbb{R}^2$の開集合であることを示せ。

24. 閉区間は閉集合
    $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$とする。閉区間$[p, q]$は閉集合であることを示せ。

25. 開集合の性質
    $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^n$が開集合であるとき、$A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$も開集合であることを示せ。

26. 開区間の無限共通部分
    $$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$$とすると、
    $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$であることを示せ。また$\{0\}$は開集合でないことを示せ。

27. 内部と開集合（１）
    (1) $A \subset \mathbb{R}^m$とする。$\boldsymbol{a} \in A, r > 0$に対して、$B_r(\boldsymbol{a}) \subset A \Rightarrow B_r(\boldsymbol{a}) \subset \mathring{A}$であることを示せ。
    (2) $\mathring{A} \subset \mathbb{R}^m$が開集合であることを示せ。

28. 内部と開集合（２）

$A \subset \mathbb{R}^m$とし、$\mathring{A}$をAの内部とする。

(1) $A' \subset A$であって、A'が開集合ならば$A' \subset \mathring{A}$であることを示せ。

(2) $A \subset \mathbb{R}^m$が開集合ならば、$A = \mathring{A}$を示せ。

29. 閉包と閉集合（１）

Aの閉包を$\overline{A}$とする。

(1) $A \subset \overline{A}$

(2) $A \subset A'$とするとき、$\boldsymbol{a} \in \overline{A}$ならば、任意の$r > 0$に対して、$B_r(\boldsymbol{a}) \cap A' \neq \emptyset$

30. 閉包と閉集合（２）

Aの閉包を$\overline{A}$とする。

(1) $A \subset A'$かつA'が閉集合$\Rightarrow \overline{A} \subset A'$

(2) Aが閉集合$\Rightarrow A = \overline{A}$

31. 有理数集合の内部と閉包

$\mathbb{Q} = \{$有理数$\}$とすると、$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$である。

32. 開区間の閉包

開区間$A = (p, q)$の閉包は$\overline{A} = [p, q]$であることを示せ。

33. 閉包は閉集合（１）

$A \subset \mathbb{R}^m$に対して、$\overline{A}$は閉集合である。

34. 演習３４は上と重複していますので、割愛します。

35. 有界閉区間上の関数は上界を持つ

有界閉区間$A \subset \mathbb{R}$とその上の連続関数$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$に対して、$f$の像は上界を持つことを示せ。

36. 有界閉区間上の関数は最大値を持つ

有界閉区間$A \subset \mathbb{R}$とその上の連続写像$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$に対して、$f$の像$f(A)$が最大値を持つことを示せ。ただし$f(A)$が上界を持つことは用いてよい．

37. 開区間はコンパクトでない

$A \subset \mathbb{R}$を開区間とするとき、Aはコンパクトでないことを示せ。

38. 実数の部分集合がコンパクトならば有界

$A \subset \mathbb{R}$がコンパクトならば、Aは有界であることを示せ。

39. 実数の部分集合がコンパクトならば閉集合

$A \subset \mathbb{R}$がコンパクトならば、Aは閉集合であることを示せ。

40. 有界閉区間はコンパクト（その１），（その２）

$A \subset \mathbb{R}$が有界閉区間ならば、Aはコンパクトであることを示せ。